ریاضیات (کاربردی ـ عددی)

۱ ـ جواب پایدار معادله روبرو کدام است؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{۲} C}{\partial x^{۲}} + \dfrac{K}{D} = \dfrac{\partial C}{\partial t} \\ C(x, t = ۰) = C_{۰} \\ C(x = ۰, t) = C_{۱} \\ C(x = L, t) = C_{۲} \end{cases}$$

۱) $(C_{۲} - C_{۱})(\frac{x}{L}) + C_{۱}$

۲) $\frac{KL^{۲}}{۲D}[(\frac{x}{L}) - (\frac{x}{L})^{۲}] + (C_{۲} - C_{۱})(\frac{x}{L}) + C_{۱}$

۳) $\frac{KL^{۲}}{۲D}[(\frac{x}{L}) - (\frac{x}{L})^{۲}]$

۴) $\frac{KL^{۲}}{۲D}[۱ - (\frac{x}{L})^{۲}] + (C_{۲} - C_{۱})(\frac{x}{L}) + C_{۱}$

۲ ـ جواب معادله دیفرانسیل $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}(r^{۲}\frac{\partial u}{\partial r})$ با شرایط مرزی زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u(۰,t) = \text{محدود} \\ u(r_{۰},t) = ۰ \\ u(r,۰) = u_{۰} \end{cases}$$

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n e^{-\alpha\lambda_n^{۲} t}\sin\lambda_n r$

۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n e^{-\alpha\lambda_n^{۲} t}\cos\lambda_n r$

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n e^{-\alpha\lambda_n^{۲} t}\frac{\sin\lambda_n r}{r}$

۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n e^{-\alpha\lambda_n^{۲} t}\frac{\cos\lambda_n r}{r}$

۳ ـ مناسب‌ترین روش برای حل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی متغیر با زمان، روش .... است.

۱) ترکیب متغیرها
۲) جداسازی متغیرها
۳) تبدیل لاپلاس
۴) گزینه ۱ و ۳

۴ ـ برای رسیدن به خطای $\varepsilon = ۰/۰۰۱$ در ریشه‌یابی تابع $f(x) = x^{۶} - x - ۱ = ۰ \quad x \in [۱,۲]$ تقریباً به چند مرحله تنصیف (بخش کردن) در روش Bisection نیاز داریم؟ $(\log ۲ = ۰/۳)$

۱) ۱۳
۲) ۱۱
۳) ۷
۴) ۱۰

۵ ـ رابطه الگوریتم تکرار روش نیوتن ـ رافسون برای محاسبه تقریبی $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(x_n - \frac{۱}{۲x_n})$
۲) $x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(x_n + \frac{۱}{۲x_n})$
۳) $x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(x_n + \frac{۲}{x_n})$
۴) $x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(x_n - \frac{۲}{x_n})$

۶ ـ چند جمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ تابع $F(x) = \sqrt{x}$ در نقاط درون‌یابی $x = ۱$ و $x = ۴$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}x - \frac{۲}{۳}$
۴) $-\frac{۱}{۳}x - \frac{۲}{۳}$

۷ ـ کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد حل عددی معادلات غیر خطی صحیح است؟

۱) سرعت روش نصف کردن و روش تکرار ساده، یکسان می‌باشد.
۲) روش نصف کردن دارای شرط همگرایی می‌باشد.
۳) روش تکرار ساده همواره همگرا است.
۴) روش نابجایی همواره همگرا است.

۸ ـ کدام یک از توابع زیر چندجمله‌ای درون‌یاب مناسب برای جدول زیر می‌باشد؟

x	f(x)	$f_۱[x_۰,x_۱]$	$f_۲[x_۰,x_۱,x_۲]$
۱	۰	۲	$\frac{۲}{۳}$
-۱	-۴	$\frac{۸}{۳}$	
۲	۴		

۱) $f(x) = \frac{۲x^{۲}}{۳} + ۲x - \frac{۸}{۳}$
۲) $f(x) = \frac{۲x^{۲}}{۳} + x + \frac{۸}{۳}$
۳) $f(x) = \frac{۸x^{۲}}{۳} + x - \frac{۲}{۳}$
۴) $f(x) = \frac{۸x^{۲}}{۳} + ۲x + \frac{۲}{۳}$

۹ ـ کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح نمی‌باشد؟

۱) هر تکرار روش وتری نسبت به روش نیوتن ـ رافسون زمان بیشتری لازم دارد.
۲) مرتبه همگرایی روش وتری ۱/۶ می‌باشد که بنابراین سرعت همگرایی آن از روش نیوتن کمتر است.
۳) زمانی که شکل تابع پیچیده باشد، استفاده از روش وتری به روش نیوتن ارجحیت دارد.
۴) در روش وتری تمام نقاط موجود در معادله بازگشتی در هر تکرار تغییر می‌نماید.

۱۰ ـ با استفاده از داده‌های جدول زیر، مقدار $f(۲)$ با استفاده از چند جمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ چقدر است؟

x	۱	۳	۵
f(x)	۴	۸	۱۶

۱) ۵/۵
۲) ۶
۳) ۶/۵
۴) ۵

۱۱ــ چنانچه مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه x_i یک بار به روش تفاضل پیشرو و یک بار به روش تفاضل پسرو با طول گام یکسان محاسبه شود، آنگاه الزاماً ....

۱) خطای هر دو روش یکسان است
۲) مقدار مشتق در هر دو روش یکسان است
۳) مرتبه خطای کلی هر دو روش یکسان است
۴) برای توابع سهمی این دو مقدار مشتق همواره با هم برابر است

۱۲ــ با توجه به داده‌های جدول مقابل، مقدار $\Delta^۳ y_۰$ کدام است؟

i	x_i	f_i
۰	۲	۱۵
۱	۴	۵
۲	۶	۱۰
۳	۸	۲۰
۴	۱۰	۲۵

۱) ۱۰
۲) ۱۰−
۳) ۵
۴) با توجه به داده‌ها، $\Delta^۳ y_۰$ تعریف نمی‌شود.

۱۳ــ اگر داده‌های جدول روبرو را برای برازش منحنی $y = \frac{۱}{Ax + B}$ به کار ببریم، در این صورت (A, B) کدام است؟

x_i	۰	۱	۲
y_i	۰/۵	۰/۲۵	۰/۲۵

۱) $(۱/۱, ۲/۱)$
۲) $(۱/۱, \frac{۷}{۳})$
۳) $(۱, ۲)$
۴) $(۱, \frac{۷}{۳})$

۱۴ــ برای حل معادله $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^۲ T}{\partial x^۲}$ از روش ترکیب متغیرها استفاده می‌شود. اگر متغیر ترکیبی $\eta = m\alpha^n x^P t^q$ باشد، مقادیر پارامترهای متغیر ترکیبی توسط کدام گزینه داده می‌شود؟

۱) $m = \frac{۱}{۲}, n = \frac{-۱}{۲}, P = ۲, q = \frac{-۱}{۲}$
۲) $m = \frac{۱}{۲}, n = \frac{۱}{۲}, P = ۱, q = \frac{-۱}{۲}$
۳) $m = \frac{۱}{۲}, n = \frac{-۱}{۲}, P = ۱, q = \frac{-۱}{۲}$
۴) $m = \frac{۱}{۲}, n = \frac{-۱}{۲}, P = ۱, q = \frac{۱}{۲}$

۱۵ــ جواب معادله PDE رو برو با شرایط مرزی داده شده کدام است؟

$$\begin{cases} r\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial C}{\partial r}) + \frac{\partial^۲ C}{\partial \theta^۲} = ۰ \\ C(۰,\theta) = \text{محدود} \\ C(r,۰) = C(r,\frac{\pi}{۲}) = ۰ \\ C(r,\theta) = F(\theta) \end{cases}$$

۱) $C(r,\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n r^{-۲n} \sin(۲n\theta)$
۲) $C(r,\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n J_۰(۲nr) \sinh(۲n\theta)$
۳) $C(r,\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n r^{۲n} \cos(۲n\theta)$
۴) $C(r,\theta) = \sum_{n=۱}^{\infty} A_n r^{۲n} \sin(۲n\theta)$

۱۶ــ معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = \frac{\partial u}{\partial x}$ را با کدام یک از مجموعه شرایط زیر می‌توان مستقیماً به روش جداسازی متغیرها حل کرد؟

۱) $\begin{cases} u(۰,y) = ۰ \\ u(x,a) = ۰ \\ u(x,b) = ۱ \end{cases}$
۲) $\begin{cases} u(۰,y) = ۱ \\ u(x,a) = ۱ \\ u(x,b) = ۰ \end{cases}$
۳) $\begin{cases} u(۰,y) = ۰ \\ u(x,a) = ۱ \\ u(x,b) = ۱ \end{cases}$
۴) $\begin{cases} u(۰,y) = ۱ \\ u(x,a) = ۰ \\ u(x,b) = ۰ \end{cases}$

۱۷ ــ کدام یک از شرایط زیر برای حل معادله دیفرانسیل $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}$ جزء شرایط مرزی همگن محسوب می‌شود؟

الف) $q''=K\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$ ب) $K\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=hu(0,t)$ ج) $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+u(0,t)=0$ د) $u(0,t)=u_0$

۱) الف و ب ۲) الف و ج ۳) ب و ج ۴) ب و د

۱۸ ــ عضو (۲ و ۱) ماتریس ژاکوبین در حل دستگاه معادلات جبری $\begin{cases} x^2-2x-y+0/5=0 \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$ به روش نیوتن ــ رافسون کدام است؟

۱) -1 ۲) -4 ۳) $0/5$ ۴) 1

۱۹ ــ تبدیل لاپلاس پاسخ معادله انتقال حرارت $\frac{\partial w}{\partial t}=C^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ در میله نیمه بی‌نهایت با شــرایط مــرزی $\begin{cases} w(0,t)=t & t\geq 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} w(x,t)=0 \end{cases}$ و شــرط اولیه $w(x,0)=0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{s}e^{\frac{-\sqrt{s}}{c}x}$ ۲) $\frac{1}{s^2}e^{\frac{-\sqrt{s}}{c}x}$ ۳) $\frac{1}{s}\cosh(\frac{\sqrt{s}}{c}x)$ ۴) $\frac{1}{2s}e^{\frac{\sqrt{s}}{c}x}+\frac{1}{2s}e^{\frac{-\sqrt{s}}{c}x}$

۲۰ ــ در مورد معادله دیفرانسیل ناهمگن $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\phi$ چه می‌توان گفت؟

۱) اگر $\phi=\phi(x)$ باشد، از تغییر متغیر $\theta(x,y)=u(x,y)+v(x)$ استفاده می‌کنیم.

۲) اگر $\phi=\phi(y)$ باشد، از تغییر متغیر $\theta(x,y)=u(x,y)+v(y)$ استفاده می‌کنیم.

۳) اگر $\phi=\phi(x,y)$ باشد، نمی‌توان معادله را از روش جداسازی متغیرها حل کرد.

۴) تمامی گزینه‌ها صحیح می‌باشد.

ریاضیات (کاربردی ـ عددی)

۱ ـ گزینه «۲»

روش اول:

$$\frac{\partial C}{\partial t}=0 \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\dfrac{K}{D}=0\\ C(x=0)=C_1\\ C(x=L)=C_2\end{cases}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{-K}{D}x+A_1= \Rightarrow C=\frac{-K}{2D}x^2+A_1x+A_2$$

$$C(x=0)=C_1 \Rightarrow A_2=C_1 \Rightarrow C(x,t)=\frac{-K}{2D}x^2+A_1x+C_1$$

$$C(x=L)=C_2 \Rightarrow C_2=\frac{-K}{2D}L^2+A_1L+C_1 \Rightarrow A_1=\frac{C_2-C_1}{L}+\frac{K}{2D}L$$

$$C(x,t)=\frac{-K}{2D}x^2+(\frac{C_2-C_1}{L}+\frac{KL}{2D})x+C_1$$

$$C(x,t)=\frac{KL^2}{2D}[(\frac{x}{L})-(\frac{x}{L})^2]+(C_2-C_1)(\frac{x}{L})+C_1$$

روش دوم:

گزینه ای صحیح است که هر دو شرط مرزی در آن صدق کند. با اعمال شرایط مشخص می‌شود گزینه‌های ۳ و ۴ نمی‌توانند صحیح باشند.

همچنین با صفر قرار دادن $\frac{\partial C}{\partial t}$ مشخص می‌شود که $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{K}{D}=0$ دارای جواب از درجه ۲ است. بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۲ ـ گزینه «۳»

با استفاده از تغییر متغیر $\phi(r,t)=ru(r,t)$ داریم:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^{2}\phi}{\partial r^{2}}$$

جواب را به شکل $\phi(r,t)=R(r)\tau(t)$ در نظر می‌گیریم:

$$R\tau'=\alpha\tau R'' \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{\tau'}{\tau}=\frac{R''}{R}=-\lambda^{2}$$

$$\tau'+\alpha\lambda^{2}\tau=0 \Rightarrow \tau=C_{1}e^{-\alpha\lambda^{2}t}$$

$$R''+\lambda^{2}R=0 \Rightarrow R=C_{2}\cos\lambda r+C_{3}\sin\lambda r$$

$$u(0,t)=\text{محدود} \Rightarrow \phi(0,t)=0 \qquad u(r_{0},t)=0 \Rightarrow \phi(r_{0},t)=0$$

$$u(r,0)=u_{0} \Rightarrow \phi(r,0)=ru_{0} \qquad \phi(0,t)=0 \Rightarrow R(0)=0 \Rightarrow C_{2}=0 \Rightarrow R=C_{3}\sin\lambda r$$

$$\phi(r_{0},t)=0 \Rightarrow R(r_{0})=0 \Rightarrow C_{3}\sin\lambda r_{0}=\sin n\pi \Rightarrow \lambda_{n}=\frac{n\pi}{r_{0}},n=1,2,...$$

$$\phi(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}e^{-\alpha\lambda_{n}^{2}t}\sin\lambda_{n}r$$

a_n را می‌توان با استفاده از شرط اولیه تعیین کرد.

$$\Rightarrow u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}e^{-\alpha\lambda_{n}^{2}t}\frac{\sin\lambda_{n}r}{r}$$

۳ ـ گزینه «۳»

روش جداسازی متغیرها

۱ـ برای استفاده از این روش، حداقل یکی از بعدهای سیستم باید مشخص باشد در نتیجه برای اجسام نیمه بی‌نهایت نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

۲ـ برای استفاده از این روش، معادله دیفرانسیل باید همگن باشد در غیر این صورت باید با روشهای خاصی معادله را به معادله همگن تبدیل نمود.

۳ـ برای استفاده از این روش، معادله باید دارای حداکثر یک شرط مرزی ناهمگن باشد در غیر این صورت معادله داده شده را به چند معادله هر کدام حداکثر با یک شرط مرزی ناهمگن تبدیل می‌کنیم.

روش ترکیب متغیرها

۱ـ این روش در حل معادلات دیفرانسیل سیستم‌هایی به کار می‌رود که دارای بعد مشخصه تعریف نشده‌ای هستند. (مانند جسم نیمه بی‌نهایت)

۲ـ از این روش وقتی می‌توان استفاده کرد که مقدار تابع مجهول (یا وابسته) به ازای دو شرط مرزی متفاوت یا یک شرط مرزی و یک شرط اولیه یکسان باشد.

تبدیل لاپلاس:

این روش مناسب‌ترین راه‌حل برای حل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی متغیر با زمان است.

۴ ـ گزینه «۲»

اگر بخواهیم با استفاده از روش تنصیف، ریشه معادله را در بازه $[a,b]$ با حداکثر خطای ε به دست آوریم، تعداد تکرارهای لازم عبارت است از:

$$n = \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log ۲} + ۱$$

در این مسأله

$$n = \frac{\log(۲-۱) - \log(۰/۰۰۱)}{\log ۲} + ۱ = \frac{\log ۱ - \log ۰/۰۰۱}{\log ۲} + ۱$$

$$\Rightarrow n = \frac{۰-(-۳)}{۰/۳} + ۱ = ۱۱$$

توجه: $\log ۲ = ۰/۳$ و $Ln ۲ = ۰/۷$ جزء مواردی است که درمحاسبات پیش آمده و بدون نیاز به ماشین حساب باید محاسبه گردد.

۵ ـ گزینه «۲»

برای تعیین ریشه Kام یک عدد از روش نیوتن رافسون به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x = \sqrt[k]{b} \Rightarrow x^k = b$$

بنابراین می‌توان معادله فوق را به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = x^k - b \ , \ f'(x) = kx^{k-۱}$$

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^k - b}{kx_n^{k-۱}} = \frac{kx_n^k - x_n^k + b}{kx_n^{k-۱}} = \frac{۱}{k}[(k-۱)x_n + bx_n^{۱-k}]$$

در این مسأله $x = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow f(x) = x^۲ - \frac{۱}{۲} \ , \ f'(x) = ۲x$

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{x_n^۲ - \frac{۱}{۲}}{۲x_n} \Rightarrow x_{n+۱} = x_n - \frac{۱}{۲}x_n + \frac{۱}{۴x_n} \Rightarrow x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(x_n + \frac{۱}{۲x_n})$$

* روش نیوتن رافسون مهم‌ترین روش درحل عددی معادلات غیرخطی می‌باشد که باید تمامی مباحث مربوط به آن مورد دقت دانشجویان قرار گیرد.

۶ ـ گزینه «۲»

روش اول

$$\begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۴ \\ \hline f(x) & ۱ & ۲ \end{array} \quad P_۱(x) = L_۰(x)f(x) + L_۱(x)f(x) = L_۰(x) + ۲L_۱(x)$$

$$L_۰(x) = \frac{x-۴}{۱-۴} = \frac{x-۴}{-۳} \ , \ L_۱(x) = \frac{x-۱}{۴-۱} = \frac{x-۱}{۳}$$

$$\Rightarrow P_۱(x) = \frac{x-۴}{-۳} + ۲(\frac{x-۱}{۳}) = \frac{۱}{۳}x + \frac{۲}{۳}$$

روش دوم (روش تستی):

با توجه به این که چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ از کلیه نقاط عبور می‌کند پس نقطه $x = ۱, y = \sqrt{۱} = ۱$ باید روی خط مورد نظر باشد که فقط در گزینه ۲ برقرار است.

* از بحث درون‌یابی حتماً در کنکور ارشد سوال مطرح می‌شود. لذا دانشجویان باید روش‌های تشریحی و تستی جواب دادن به این گونه مسائل را بلد باشند.

۷ ـ گزینه «۴»

روش نصف کردن

۱ـ این روش همواره همگراست ولی روش کندی است. ۲ـ همگرایی روش تنصیف، خطی (مرتبه اول) است.

۳ـ یکی از اشکالات این روش این است که ممکن است یک تقریب میانی مناسب با کم توجهی حذف گردد.

روش نابجایی

۱ـ این روش همواره همگراست. ۲ـ مرتبه همگرایی این روش ۱/۶۱۸ = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

۳ـ معمولاً روش نابجایی از روش تنصیف سریع‌تر است ولی تعداد عملیات ریاضی آن از روش تنصیف بیشتر است.

روش تکرا ساده

۱ـ همگرایی این روش خطی (مرتبه اول) است.

نکته

۱ـ روش‌های تنصیف و نابجایی همواره همگرا هستند ولی سایر روش‌ها به شرایط بستگی دارند.

۲ـ روش نیوتن از بقیه روش‌ها سریع‌تر است و روش تنصیف و تکرار ساده از همه کندتر هستند.

* دانشجو باید بداند از روش نابجایی یک تصحیح بر روش نصف کردن می‌باشد که بنابراین همواره همگرا خواهد بود و مقایسه سرعت همگرایی در روش‌های ۵ گانه به صورت زیر است:

نصف کردن < تکرار ساده < میان‌یابی (نابجایی) = تقاطع (وتری) < نیوتن ـ رافسون

۸ ـ گزینه «۱»

$$f(x) = f_0^{(0)} + (x - x_0)f_0^{(1)} + (x - x_0)(x - x_1)f_0^{(2)}$$

$$f(x) = 0 + 2(x - 1) + (x - 1)(x + 1)\frac{2}{3}$$

$$f(x) = 2(x - 1) + (x^2 - 1)\frac{2}{3} = 2x - 2 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3}$$

* مفاهیم و کاربردهای روش درون‌یابی لاگرانژ و نیوتن و چندجمله‌ای‌های درون‌یاب مربوط به هر کدام بسیار مهم است.

۹ ـ گزینه «۱»

۱ـ مرتبه همگرایی روش وتری $۱/۶۱۸ = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است که نشان می‌دهد این روش از روش تنصیف سریع‌تر و از روش نیوتن کندتر است.

۲ـ با این که روش نیوتن از روش وتری سریع‌تر است، اما در روش نیوتن به محاسبه $f(x_n)$ و $f'(x_n)$ نیاز است. ولی در روش وتری فقط به محاسبه $f(x_n)$ نیاز است یا به عبارت دیگر هر تکرار روش وتری نسبت به روش نیوتن زمان کمتری لازم دارد.

۳ـ از اشکالات روش وتری این است که نزدیکی به جواب به صورت یک طرفه است و هرگاه $f(x)$ بین a و b در بازه $[a,b]$ دارای انحنای بزرگی باشد، سرعت رسیدن به جواب کم خواهد شد.

۴ـ سرعت همگرایی روش نیوتن به علت دقیق بودن مشتق در هر نقطه بیشتر می‌باشد.

۵ـ زمانی که شکل تابع پیچیده باشد از روش وتری استفاده می‌شود. چون نیاز به مشتق‌گیری و پیچیده شدن بیشتر نخواهد شد.

۱۰ـ گزینه «۱»

با توجه به چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ داریم:

$$P(x) = L_۰f_۰ + L_۱f_۱ + L_۲f_۲$$

$$f(x) = \frac{(x-x_۱)(x-x_۲)}{(x_۰-x_۱)(x_۰-x_۲)}f(x_۰) + \frac{(x-x_۰)(x-x_۲)}{(x_۱-x_۰)(x_۱-x_۲)}f(x_۱) + \frac{(x-x_۰)(x-x_۱)}{(x_۲-x_۰)(x_۲-x_۱)}f(x_۲)$$

$$f(۲) = \frac{(۲-۳)(۲-۵)}{(۱-۳)(۱-۵)}\times ۴ + \frac{(۲-۱)(۲-۵)}{(۳-۱)(۳-۵)}\times ۸ + \frac{(۲-۱)(۲-۳)}{(۵-۱)(۵-۳)}\times ۱۶$$

$$f(۲) = \frac{-۱\times -۳}{-۲\times -۴}\times ۴ + \frac{۱\times -۳}{۲\times -۲}\times ۸ + \frac{۱\times -۱}{۴\times ۲}\times ۱۶$$

$$f(۲) = \frac{۳}{۸}\times ۴ + \frac{۳}{۴}\times ۸ - \frac{۱}{۸}\times ۱۶ = \frac{۳}{۲} + ۶ - ۲ = ۵/۵$$

* روش درون‌یابی لاگرانژ از روش‌های بسیار مهم در بحث پیدا کردن چندجمله‌ای‌های درون‌یاب می‌باشد.

۱۱ ـ گزینه «۳»

برای محاسبه مشتق عددی از بسط تیلور استفاده می‌کنیم:

مشتق مرتبه اول و دوم

(۱) تفاضل پیشرو $f'_i = \frac{f_{i+۱} - f_i}{h}$ $\qquad f''_i = \frac{f_{i+۲} - ۲f_{i+۱} + f_i}{h^۲}$

(۲) تفاضل پسرو $f'_i = \frac{f_i - f_{i-۱}}{h}$ $\qquad f''_i = \frac{f_{i-۲} - ۲f_{i-۱} + f_i}{h^۲}$

(۳) تفاضل مرکزی $f'_i = \frac{f_{i+۱} - f_{i-۱}}{۲h}$ $\qquad f''_i = \frac{f_{i+۱} - ۲f_i + f_{i-۱}}{h^۲}$

در محاسبه مشتق مرتبه اول، مرتبه خطای کلی و محلی دو روش پیشرو و پسرو با هم برابر است. (محلی = ۲ و کلی = ۱) بنابراین دقت این دو روش یکسان است و در محاسبه مشتق مرتبه اول فرقی نمی‌کند که از کدام روش مشتق‌گیری عددی انجام شود.

* مقایسه بین روش‌های مختلف مشتق‌گیری عددی (تفاضل پیشرو ـ پسرو ـ مرکزی) از نظر خطای محلی و کلی و سایر پارامترهای مشابه بسیار مهم است.

۱۲ ـ گزینه «۲»

فرمول مشتق سوم با استفاده از تفاضل‌های مستقیم به صورت زیر می‌باشد:

$$f_i'''=\frac{\Delta^{۳} f_i}{h^{۳}}=\frac{f_{i+۳}-۳f_{i+۲}+۳f_{i+۱}-f_i}{h^{۳}}$$

در این مسأله $\Delta^{۳} y_{\circ}$ یعنی مشتق سوم به ازای $i=\circ$ با طول گام $h=۱$:

$$f_{\circ}'''=\frac{f_{۳}-۳f_{۲}+۳f_{۱}-f_{\circ}}{h^{۳}}=\frac{۲\circ-۳\times ۱\circ+۳\times ۵-۱۵}{۱^{۳}}=۲\circ-۳\circ+۱۵-۱۵=-۱\circ$$

* بهتر است رابطه مشتق سوم که در سوال فوق مطرح شده توسط دانشجویان حفظ شود تا در وقت پاسخ‌گویی به این گونه سوالات صرفه‌جویی می‌شود.

۱۳ ـ گزینه «۴»

$$y=\frac{۱}{Ax+B}\ \Rightarrow\ \frac{۱}{y}=Ax+B\ \xrightarrow{\frac{۱}{y}=Y,x=X} Y=AX+B$$

x_i	y_i	X_i	Y_i	$X_i^{۲}$	X_iY_i
۰	۰/۵	۰	۲	۰	۰
۱	۰/۲۵	۱	۴	۱	۴
۲	۰/۲۵	۲	۴	۴	۸
		$\sum X_i=۳$	$\sum Y_i=۱\circ$	$\sum X_i^{۲}=۵$	$\sum X_iY_i=۱۲$

$$\begin{cases} A\sum X_i+nB=\sum Y_i \\ A\sum X_i^{۲}+B\sum X_i=\sum X_iY_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳A+۳B=۱\circ \\ ۵A+۳B=۱۲ \end{cases}\Rightarrow\ A=۱\ ,\ B=\frac{۷}{۳}$$

* همواره در مسائل برازش و رگرسیون داده‌ها فرم منحنی را باید به صورت استاندارد $Y=AX+B$ درآورد تا بتوان از روابط مربوطه در به دست آوردن A و B استفاده نمود.

۱۴ ـ گزینه «۳»

در روش ترکیب متغیرها ابتدا متغیر جدیدی را که تابعی از متغیرهای مستقل سیستم است، تعریف می‌کنیم و با استفاده از این متغیر معادله دیفرانسیل جزئی را به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کنیم. برای حل معادله دیفرانسیل $\alpha\frac{\partial^{۲}T}{\partial x^{۲}}=\frac{\partial T}{\partial t}$ با استفاده از روش ترکیب متغیرها، از تغییر متغیر $\eta=\frac{x}{\sqrt{m\alpha t}}$ استفاده می‌کنیم. (که معمولاً $m=۴$ انتخاب می‌شود.) و در نتیجه به معادله دیفرانسیل معمولی روبرو می‌رسیم:

$$T''+\frac{m}{۲}\eta T'=\circ$$

$$\alpha\frac{\partial^{۲}T}{\partial x^{۲}}=\frac{\partial T}{\partial t}\ ,\ \eta=\frac{x}{\sqrt{۴\alpha t}}$$

$$\eta=\frac{۱}{۲}\alpha^{-\frac{۱}{۲}}xt^{-\frac{۱}{۲}}\sim m\alpha^{n}x^{P}t^{q}\ \Rightarrow\ m=\frac{۱}{۲}\ ,\ n=\frac{-۱}{۲}\ ,\ P=۱\ ,\ q=-\frac{۱}{۲}$$

❋ به دلیل طولانی بودن حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به روش ترکیب متغیرها معمولاً از این مبحث، مسائلی به فرم مطرح شده در این تست پرسیده می‌شود و لذا دانستن مفاهیم این روش بسیار مهم است.

۱۵ ـ گزینه «۴»

از شرط مرزی $C(r,\theta)=F(\theta)$ مشخص است که در راستای θ جواب اورتوگونال (یا قابل تبدیل به اورتوگونال) داریم. در صورتی که در راستای r باید جواب غیر اورتوگونال باشد. لذا گزینه ۲ نمی‌تواند جواب صحیحی باشد. از طرف دیگر در $\theta=\circ$ شرط مرزی نوع اول است پس در راستای θ جواب سینوسی است. پس گزینه ۱ نیز می‌تواند جواب باشد اما از شرط مرزی $C(r=\circ,\theta)$ متوجه می‌شویم که توان r باید مثبت باشد پس فقط گزینه ۴ درست خواهد بود.

❋ در کنکور ارشد اغلب مسائلی که منجر به حل یک معادله PDE می‌شوند با نکات تستی قابل حل است و نیازی به حل تشریحی آنها نمی‌باشد.

۱۶ ـ گزینه «۴»

شرایط مرزی ذکر شده در گزینه ۱ و ۲ در راستای y نمی‌توانند همزمان به حالت همگن نوشته شوند پس گزینه ۳ یا ۴ صحیح می‌باشد. برای حل معادلات با شرایط مرزی ذکر شده در گزینه ۳ لازم است ابتدا تغییر متغیری بدهیم (مثلاً $F=U-۱$) تا شرایط مرزی به صورت همگن درآید.

معادله داده شده با شرایط مرزی داده شده در گزینه ۴ مستقیماً با جداسازی متغیرها قابل حل است چون هر دو شرط در انتهای مرزها همگن است و نیازی به تغییر متغیر نیست.

۱۷ ـ گزینه «۳»

انواع شرایط مرزی عبارتند از:

۱ـ شرط مرزی نوع اول یا دریکله: مقدار متغیر وابسته بر روی مرزها معلوم است یعنی از مقدار تابع در مرزها اطلاع می‌دهد.

۲ـ شرط مرزی نوع دوم یا نیومن: مقدار مشتق متغیر وابسته بر روی مرزها معلوم است یعنی از مقدار مشتق تابع در مرزها اطلاع می‌دهد.

۳ـ شرط مرزی نوع سوم یا روبین: ترکیب خطی از دو شرط مرزی اول و دوم یعنی از رابطه‌ای بین تابع و مشتق تابع در مرزها اطلاع می‌دهد.

شرایط همگن و ناهمگن:

هر گاه شرط مرزی را به شکل کلی $au + bu' = c$ در نظر بگیریم داریم:

$$\left.\begin{aligned} C = ۰ \\ C \neq ۰ \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\Leftarrow \text{شرط مرزی همگن است.} \\ &\Leftarrow \text{شرط مرزی ناهمگن است.} \end{aligned}$$

در واقع اگر در شرط مرزی به جز تابع و مشتق آن عبارت دیگری باشد، شرط ناهمگن خواهد بود.

۱۸ ـ گزینه «۱»

در حل دستگاه دو معادله دومجهولی $\begin{cases} f_۱(x,y) = ۰ \\ f_۲(x,y) = ۰ \end{cases}$ باید ابتدا تابع دستگاه و ماتریس ژاکوبین آن را تعیین کنیم و سپس با توجه به حدس اولیه و شرایط تکرار، دستگاه را به روش نیوتن رافسون حل نمود.

تابع $F(x_n, y_n) = \begin{bmatrix} f_۱(x_n, y_n) \\ f_۲(x_n, y_n) \end{bmatrix}$ و ژاکوبین $J(x_n, y_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_۱ & \frac{\partial}{\partial y} f_۱ \\ \frac{\partial}{\partial x} f_۲ & \frac{\partial}{\partial y} f_۲ \end{bmatrix}$

$$F(x_n, y_n) = \begin{bmatrix} x_n^۲ - ۲x_n - y_n + ۰/۵ \\ x_n^۲ + ۴y_n^۲ - ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow J(x_n, y_n) = \begin{bmatrix} ۲x_n - ۲ & -۱ \\ ۲x_n & ۸y_n \end{bmatrix}$$

(۱-) عضو موجود در سطر اول و ستون دوم ماتریس ژاکوبین

❋ نحوه حل دستگاه دو معادله دو مجهولی و تعیین ماتریس ژاکوبین به روش نیوتن رافسون اهمیت دارد.

۱۹ ـ گزینه «۲»

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$C^{2}L[\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}}]=L[\frac{\partial w}{\partial t}]$$

$$C^{2}\frac{d^{2}w(x,s)}{dx^{2}}=sw(x,s)-w(x,0)$$

$$w(x,0)=0 \Rightarrow \frac{d^{2}w(x,s)}{dx^{2}}-\frac{s}{C^{2}}w(x,s)=0$$

$$w(x,s)=C_{1}e^{\frac{\sqrt{s}}{c}x}+C_{2}e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x} \qquad (1)$$

$$w(0,t)=t \Rightarrow w(0,s)=\frac{1}{s^{2}} \xrightarrow{(1)} \frac{1}{s^{2}}=C_{1}+C_{2} \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to\infty} w(x,t)=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} w(x,s)=0 \xrightarrow{(1)} C_{1}=0 \xrightarrow{(2)} C_{2}=\frac{1}{s^{2}}$$

$$\Rightarrow w(x,s)=\frac{1}{s^{2}}e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x}$$

* روش تبدیل لاپلاس در معادله گرما با شرایط مرزی مربوط به جسم نیمه بی‌نهایت بسیار مهم است.

۲۰ ـ گزینه «۴»

۲ روش برای حل معادلات دیفرانسیل ناهمگن وجود دارند که عبارت است از:

۱ـ روش تغییر متغیر: در این روش با در نظر گرفتن جواب به شکل مجموع چند جواب به چند معادله دیفرانسیل همگن می‌رسیم. در واقع ناهمگنی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به ناهمگنی معادله دیفرانسیل معمولی منتقل می‌کنیم. در رابطه با معادله دیفرانسیل ناهمگن $\frac{\partial^{2}\theta}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\theta}{\partial y^{2}}=\phi$ نکات زیر بسیار مهم است:

الف) اگر $\phi=\phi(x)$ باشد از تغییر متغیر $\theta(x,y)=u(x,y)+v(x)$ استفاده می‌کنیم.

ب) اگر $\phi=\phi(y)$ باشد از تغییر متغیر $\theta(x,y)=u(x,y)+v(y)$ استفاده می‌کنیم.

ج) اگر ϕ مقدار ثابتی باشد، از هر کدام از تغییر متغیرهای الف و ب می‌توانیم استفاده کنیم.

د) اگر $\phi=\phi(x,y)$ باشد معادله را نمی‌توان از روش جداسازی متغیر حل کرد.

۲ـ روش بسط تابع ویژه: در حالتی که نتوانیم از روش تغییر متغیرها ناهمگنی معادله دیفرانسیل را از بین ببریم، از روشی به نام روش بسط تابع ویژه استفاده می‌کنیم. همچنین این روش برای حالتی که ناهمگنی معادله دیفرانسیل وابسته به زمان است، متناسب می‌باشد.

* شرایط مرزی و همگن و ناهمگن بودن آنها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی و روش حل آنها تأثیرگذار است.